Платоновы тела и элементарные частицы

Л.И.Верховский

Наш крупнейший специалист по физике высоких энергий академик Л.Б.Окунь писал: «Физиков можно назвать охотниками за симметриями: в некотором смысле они отличаются от остальных людей тем, что отыскивают в природе все более скрытые и все более фундаментальные типы симметрий». Это отчетливо видно в области элементарных частиц, где именно выявление симметрий служит тем орудием, которое позволяет свести все разнообразие наблюдаемых сущностей к немногим лежащим в их основе структурам.

С другой стороны, в математике есть выделенные объекты, обладающие нетривиальной, удивительной симметрией. Прежде всего к ним принадлежат правильные многогранники, возможную роль которых в физике еще предстоит раскрыть.

Из тьмы веков

На плоскости можно нарисовать равносторонний многоугольник с любым числом сторон, а вот трехмерных аналогов таких фигур, то есть выпуклых тел, любая из граней которых есть один и тот же правильный многоугольник, существует всего пять (рис. 1). Это тетраэдр (у него четыре грани), куб (шесть), октаэдр (восемь), додекаэдр (двенадцать) и икосаэдр (двадцать).

Такими многогранниками интересовались еще пифагорейцы, но их называют «Платоновыми телами», поскольку весь набор из пяти фигур впервые был рассмотрен Теэтетом и другими античными математиками, близкими к Академии Платона. Открытие ими двух самых сложных тел (икосаэдра и додекаэдра) стало очень крупным достижением; к тому же они поняли, что никаких других подобных тел не может быть. Древнегреческие натурфилософы увидели в этих геометрических образах глубокий смысл. Четырем они сопоставили стихии: тетраэдру — огонь, октаэдру — воздух, кубу — землю, икосаэдру — воду. А с пятым телом, то есть додекаэдром, они связали квинтэссенцию (буквально, «пятую сущность») в виде всей Вселенной.

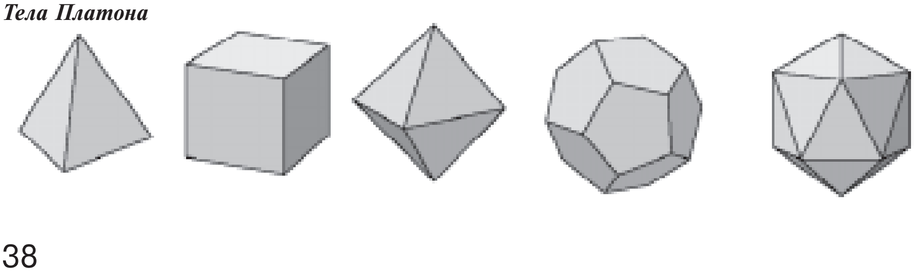
Затем интерес к таким фигурам возник в эпоху Возрождения. О них писали геометры, архитекторы и художники, например Пьеро делла Франческа и Альбрехт Дюрер. Леонардо да Винчи собирал из дерева их каркасные модели и сделанными с них рисунками дополнил книгу своего друга Луки Пачоли «О божественной пропорции». Много внимания уделяли золотому сечению и числам Фибоначчи, которые проявляют себя в правильном пятиугольнике, а значит, и в додекаэдре.

Следующую яркую страницу в научную историю Платоновых тел вписал Иоганн Кеплер. В его время были известны шесть планет, а также их примерные расстояния от Солнца. В сочинении 1595 года «Космографическая тайна», то есть задолго до открытия трех законов, получивших его имя, Кеплер попытался вывести строение космоса (по Копернику) из единого геометрического принципа.

Орбиту самой близкой к светилу планеты Меркурия он изобразил сферой произвольного радиуса; описав вокруг нее октаэдр, а вокруг него — новую сферу, Кеплер принял ее за орбиту Венеры. Далее он повторял эту процедуру, варьируя тип многогранника. В результате он получил шесть сфер, радиусы которых в первом приближении отображали относительные размеры планетных орбит. Позднее астрономы обнаружили за Сатурном еще три планеты, так что догадка Кеплера о связи числа планет с Платоновыми телами лишилась своего основания. Но сама попытка унификации Солнечной системы заслуживает уважения; как сказал крупнейший математик прошлого века Герман Вейль, «мы и поныне разделяем с Кеплером его убеждение в математической гармонии Вселенной».

Значение правильных многогранников в математике давно признано. Выдающийся немецкий математик и педагог Феликс Клейн (автор книги об икосаэдре) писал в 1910-х годах: «Они проходят через всю историю науки. Пифагорейцы видели в них символы некоего мистического совершенства… Тринадцать книг Евклидовых «Начал» служили лишь введением к их построению… А в наши дни они снова вступают в поле зрения математиков, где удивительнейшим образом связуют различные ее области, указуя путь к дальнейшим исследованиям».

1
Тела Платона



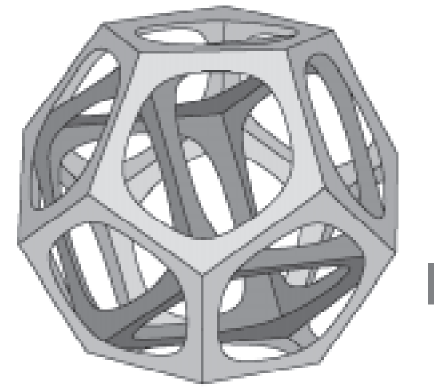
Блеск симметрии

Изучение Платоновых тел строгими методами математики началось в XIX веке, когда были развиты теория групп и другие важнейшие ветви этой науки. Что с ее точки зрения отличает такие многогранники? Конечно же симметрия. Один из основоположников кристаллографии Е.С.Федоров говорил, что кристаллы «блещут своей симметрией». То же можно сказать и об этих телах.

Ясно, что из трехмерных фигур наиболее симметрична сфера: к ее самосовмещениям приводят повороты на любой угол вокруг любой оси, проходящей через ее центр, а также отражения от плоскостей, осей и центра симметрии. С Платоновыми телами тоже можно проделать много разных операций вращения и отражения, при которых они превращаются сами в себя, но, в отличие от сферы, число таких операций будет конечно. Иначе говоря, вращения сферы образуют непрерывную группу, а многогранников — дискретные и конечные группы.

(Напомню, что множество операций есть математическая группа, если оно замкнуто, то есть любые две из них, выполненные последовательно, приводят к результату, которого можно было бы достичь, применив какую-то одну из имеющихся операций. Допустимые вращения наших фигур удовлетворяют этому требованию.)

Сейчас нас будут интересовать только повороты — мы хотим установить, как устроены группы вращения правильных многогранников. Заметим еще, что, соединив центры соседних граней любого Платонова тела, мы получим другое, двойственное ему тело из того же списка — тетраэдр перейдет снова в тетраэдр, куб в октаэдр (и обратно), икосаэдр в додекаэдр (и обратно). А поскольку возможные повороты двойственных фигур совпадают, то существуют только три



2
Куб, вписанный в додекаэдр (этот рисунок взят из брошюры И.М.Парамоновой «Симметрия в математике». М.: МЦНМО, 2002)

разные группы вращений: 1) тетраэдра; 2) куба — октаэдра; 3) икосаэдра — додекаэдра.

Начнем с тетраэдра, который наиболее прост. Сколько он допускает вращений или каков порядок группы? Это легко сосчитать, учитывая, что всякая ось симметрии n-го порядка (то есть когда при обороте вокруг нее на 360 градусов фигура n раз совмещается сама с собой) делает возможными (n — 1) разных поворотов. В тетраэдре есть четыре оси третьего порядка, которые проходят через его вершины и центры лежащих напротив них граней, а также три оси второго порядка, соединяющих середины противоположных (не имеющих общих вершин) ребер. Принято еще прибавлять тождественный поворот. Итого: 4x2 + 3x1 + 1 = 12.

Аналогичным образом, рассмотрев возможные вращения куба и икосаэдра, получим, что порядки их групп соответственно 24 и 60.

Переставляем предметы

Теперь на время забудем про Платоновы тела и займемся всевозможными расположениями предметов, число которых обозначим буквой K. Операции их перестановок тоже задают группу, которую обозначают S_k.

Сколько всего будет различных расстановок? На первом месте может находиться любой из K предметов, на втором — любой из оставшихся, то есть (K – 1), на третьем — любой из (K – 2) и так далее. Перемножая, получим: Kx(K – 1).....3x2x1, или K! (читается: «K-факториал»). Заметим, что 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120; столько операций содержат группы S_3, S_4 и S_5.

Кроме групп S_k всех перестановок K предметов есть еще важные группы четных перестановок (обозначают A_k). Дело в том, что от одного расположения предметов к любому другому можно перейти не одним, так сказать, большим скачком, а несколькими мелкими шагами — последовательно меняя местами каждый раз лишь два элемента (такие замены называют «транспозициями»). Скажем, если у нас два набора из четырех цифр 2-4-3-1 и 1-4-2-3, то от одного к другому можно перейти двумя транспозициями: 2-4-3-1 —> 3-4-2-1 —> 1-4-2-3.

Тогда множество всех расстановок разбивается на два равных класса: одни получаются из некоторой исходной четным числом транспозиций, другие — нечетным. Так как всего перестановок K!, то четных и нечетных будет по K!/2. Значит, порядок группы A_3 равен 3, A_4 — 12, A_5 — 60.

Группы всех перестановок S_n называют симметрическими (откуда обозначение S), а группы A_n — знакопеременными (или альтернативными, откуда символ A). Почему такие названия? Это связано с симметрией многочленов, которую эти группы отражают. Для примера возьмем две функции от трех переменных:

1) $X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3$;
2) $(X_1 - X_2)(X_2 - X_3)(X_1 - X_3)$.

Придадим всем переменным X_i какие-нибудь конкретные значения и посмотрим, как ведут себя функции при попарных переименованиях иксов (при транспозициях). Первая из них сохранит свое значение при любых перестановках аргументов, поэтому ее будет описывать группа S_3. А вторая меняет знак при каждой транспозиции, то есть она знакопеременная, и, чтобы этот многочлен остался неизменным, надо сделать четное число таких замен; значит, тут группа четных перестановок трех элементов A_3.

Соответствия групп

Вернемся к нашим баранам, то бишь многогранникам. При любых поворотах некоторые геометрические образы в них — грани, вершины или ребра — меняются местами, и неожиданно оказалось, что группы вращения таких тел в математическом отношении неотличимы от определенных групп перестановок — симметрических или альтернативных.

Начнем опять с тетраэдра. При поворотах вокруг осей третьего порядка одна его вершина остается неподвижной, а три оставшиеся циклически переставляются. А при поворотах вокруг осей второго порядка вершины попарно меняются местами. Все вместе они дают 12 четных перестановок четырех этих точек (группа A_4).

Теперь рассмотрим куб (и двойственный ему октаэдр). При любом повороте куба его четыре большие диагонали меняются местами, и его группа вращения совпадает с S_4 — группой всех перестановок четырех элементов. Ее порядок 24.

А вращениям икосаэдра (и додекаэдра) отвечает группа четных перестановок A_5 из 60 операций. Каковы те пять элементов, которые меняются местами? В данном случае их увидеть сложнее. Оказывается, это пять октаэдров, вписанных в икосаэдр (или пять кубов — в додекаэдр). На рис. 2 показан вписанный в додекаэдр куб; из него становится понятным, что таких кубов действительно может быть пять — ведь в каждой пятиугольной грани есть пять диагоналей, которые служат им ребрами.

Неразличимость микрочастиц

Теперь пришла пора перекинуть мостик от мира многогранников к миру элементарных частиц. Когда в 30-х годах шло формирование квантовой химии, в ней стали широко использовать теорию групп; заговорили даже о «групповой чуме». И большое внимание уделяли группам перестановок.

Дело в том, что в квантовой механике систему из многих частиц описывают единой волновой функцией. А вероятность того или иного события определяется квадратом этой волновой функции. Представим себе функцию, которая описывает систему из двух одноименных элементарных частиц, например, двух электронов. В квантовой механике такие частицы неразличимы между собой. Значит, если поменять их местами (осуществить транспозицию — вспомним наши многочлены), то вероятность связанного с ними события, то есть квадрат функции не изменится. А это возможно в двух случаях: если волновая функция сохраняет свой знак при транспозиции, то есть она симметрична, либо изменяет знак (антисимметрична). В зависимости от того, какой вариант реализуется, все частицы делят на два класса — бозоны и фермионы. Бозонам будут соответствовать группы S_n, а фермионам A_n. Поэтому такие группы широко используют при изучении микросистем в ядерной и атомной физике, квантовой химии и спектроскопии.

Конечно, теория групп играет ведущую роль и в изучении собственно элементарных частиц, описывая разные симметрии в них. Прежде всего, в соответствии с только что рассмотренным принципом она делит их на фермионы и бозоны. Фермионы служат строительным материалом физического мира, а бозоны переносят взаимодействия.

Известные сейчас 24 фундаментальных (на сегодняшний день бесструктурных) фермиона приведены в таблице. Они разбиты на три похожие восьмерки — как бы

Поколения	Лептоны	Кварки (Красный)	Кварки (Синий)	Кварки (Зеленый)
I	Электронное нейтрино	u	u	u
	Электрон	d	d	d
II	Мюонное нейтрино	c	c	c
	Мюон	s	s	s
III	Тау-нейтрино	t	t	t
	Тау-частица	b	b	b

три поколения частиц, различающихся по массам. В каждое поколение входят два лептона (электрон или его более тяжелый аналог, а также нейтрино одного из трех возможных типов) и два кварка, каждый из которых бывает трех цветов. Может ли таблица в будущем пополниться другими такими поколениями (четвертым, пятым и другими)? — этот вопрос остается открытым.

На пути к единству

На повестке дня стоит задача объединения различных физических сил, иными словами, нахождения группы, которая охватила бы все частицы и их взаимодействия. Уже унифицированы электрические и слабые силы (теория Вайнберга — Салама), а теперь физики бьются над «Великим объединением», которое должно включить и сильное взаимодействие.

Тут популярна модель Г.Джорджи и Ш.Глэшоу (см. рецензию на книгу Глэшоу «Очарование физики» в «Химии и жизни», 2003, № 12). Они в большой степени формально, механически соединили группы, которые отвечают отдельным известным взаимодействиям (электрослабому и сильному), и наиболее экономным способом включили их в более широкую, так называемую SU(5) группу.

Нам сейчас необязательно выяснять, что это такое. Главное, что она описывает фермионы матрицей размером пять на пять, а тогда число переносящих взаимодействия бозонов равно количеству элементов матрицы минус один. Так модель объясняет общее количество бозонов, а именно 24. Важно, что этот набор бозонов, реализующих все превращения фермионов, уже, как полагают ученые, изменению не подлежит (даже если число фермионных поколений возрастет).

Что это за набор? Во-первых, четыре частицы, переносящие электрослабые силы, — фотон, W^+, W^-, Z^0. Во-вторых, восемь глюонов, обеспечивающих цветовое взаимодействие кварков. К ним нужно добавить еще две шестерки гипотетических переносчиков, называемых X- и Y-частицами, или лептокварками. Они, согласно модели Джорджи — Глэшоу, при очень высокой энергии могут преобразовывать кварки в лептоны и обратно (с ними связана возможная нестабильность протона).

Подход Джорджи и Глэшоу — лишь один из многих возможных. Главная проблема заключается в отыскании лежащей в основе физической реальности группы. Обычно ее ищут среди различных непрерывных групп вроде SU(5). А может быть, стоит обратить взор и на конечные группы? И не послужит ли тут зацепкой сам факт разделения частиц на фермионы и бозоны?

В соответствии с поведением волновой функции при транспозициях фермионы могли бы быть реализацией какой-то знакопеременной группы, а бозоны — симметрической. Но, как мы видели, в случае четырех или пяти переставляемых элементов эти группы описывают вращения Платоновых тел, причем число операций в них и количество фундаментальных частиц лежат в одних и тех же границах.

Возможно, именно в правильных многогранниках заключен тот единый геометрический принцип, который позволит раскрыть внутреннюю логику мира частиц, предсказать их состав и свойства.

Куб бозонов

Сначала взглянем под этим углом зрения на бозоны. Как сказано, всего их 24, но ведь таков порядок симметрической группы S_4 (она же группа вращения куба). Мы только что захотели сопоставить бозонам одну из таких групп и сразу же правильно получили их общее количество. Но это не все. Для математика понять структуру группы — значит выявить ее подгруппы, определить их тип и отношения между ними. Подгруппы — это такие подмножества группы, которые сами тоже суть группы; у подгруппы могут быть свои подгруппы, у тех свои и так далее. И нужно разобраться во всей этой «матрешке».

Особое значение имеют так называемые нормальные подгруппы, но, чтобы не залезть в дебри абстракций, тут мы ограничимся лишь очень грубой аналогией: если группу сравнить с некоторым числом, то нормальной подгруппе можно сопоставить другое число, служащее делителем первого. Наличие таких подгрупп позволяет разложить исходную группу на более мелкие (как бы разложить число на множители). Давайте выясним, как разложить группу вращения куба на подгруппы.

В ней имеется нормальная подгруппа тетраэдра. Ведь в куб можно вписать два тетраэдра (рис. 3), которые, пересекаясь,

3
Два вписанных в куб пересекающихся тетраэдра образуют восьмиконечную звезду (stella octangula)

СЛОВАРИК

Бозоны — элементарные или составные частицы с целым (или нулевым) спином, которые подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна. Благодаря этому в одном и том же квантовом состоянии может оказаться любое число одинаковых частиц. Примеры бозонов: фотон, мезоны, ядра с четным числом нуклонов.

Фермионы — элементарные или составные частицы с полуцелым спином, подчиняющиеся статистике Ферми—Дирака (для них верен «принцип запрета» Паули, который гласит, что в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы). Примеры фермионов: электрон, мюон, нейтрино, кварки, протон, нейтрон, ядра с нечетным числом нуклонов.

Лептоны — фундаментальные (бесструктурные) фермионы, не участвующие в сильных взаимодействиях. В этот класс входят электрон и его аналоги (мюон и тау-частица), их античастицы, а также нейтрино.

Кварки — фундаментальные фермионы, обладающие цветовым зарядом, между которыми путем обмена глюонами происходят сильные взаимодействия. В свободном виде не наблюдаются. Из кварков состоят, например, протон и нейтрон (по три кварка в каждом), а также многие другие нестабильные частицы.

Глюоны — безмассовые, но обладающие цветом частицы, которые переносят сильное взаимодействие между кварками. Обмен глюонами меняет цвет кварка.

W^+, W^- и Z^0-бозоны — частицы, которые, наряду с фотоном, осуществляют электрослабые взаимодействия. В отличие от фотонов, имеют массу покоя. W^+ и W^--бозоны обладают электрическим зарядом, а Z^0 нет.

Сильное взаимодействие — самое сильное из четырех фундаментальных взаимодействий между элементарными частицами. Его радиус действия 10^{-12} см. Оно обеспечивает прочную связь между нуклонами в ядре.

Слабое взаимодействие — одно из четырех фундаментальных взаимодействий между элементарными частицами. Оно много слабее сильного и электромагнитного, но сильнее гравитационного. Проявляется на расстояниях 10^{-16} см. Слабое взаимодействие играет важную роль в природе. Оно превращает заряженные лептоны в нейтрино, кварки одного типа в кварки другого, а также обеспечивает превращение протона в нейтрон, позитрон и нейтрино. А эта реакция лежит в основе термоядерного синтеза в звездах.

образуют невыпуклый, звездчатый многогранник, названный Кеплером stella octangula (восьмиконечная звезда). И каждый из тетраэдров определяет свою нормальную подгруппу.

А у группы тетраэдра, в свою очередь, тоже есть нормальная подгруппа. Она состоит из тождественного поворота и трех вращений на 180° вокруг трех осей второго порядка — линий, соединяющих середины противоположных ребер (мы об этом говорили, когда рассматривали возможные повороты тетраэдра); ее называют квадратичной, или группой Клейна.

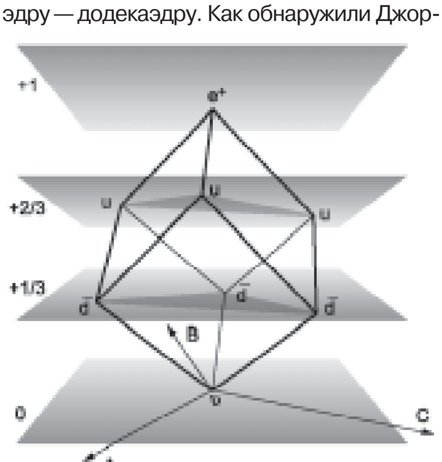
Операциям группы Клейна сопоставимы четыре переносчика электрослабого взаимодействия — фотон, W^+, W^-, Z^0. Но тетраэдр можно еще вращать вокруг осей третьего порядка, и подобных операций всего восемь — это будут восемь глюонов. Наконец, есть 12 поворотов куба, переставляющих два тетраэдра в stella octangula, причем геометрически (по типу осей вращения) такие повороты разбиваются на две шестерки, которые логично связать с шестью X- и шестью Y-частицами.

Тогда получается, что слабые силы отвечают группе Клейна, при которой попарно переставляются четыре элемента; известно, что в слабых взаимодействиях всегда именно так участвуют четыре фермиона. А цветовые силы между кварками соответствуют вращениям тетраэдра вокруг осей третьего порядка, когда циклически переставляются три элемента. Можно фантазировать, что кварки и глюоны потому не наблюдают в свободном виде, что их порождают подгруппы, не являющиеся нормальными.

Как нетрудно увидеть, разложение группы куба ($24 = 4 + 8 + 6 + 6$) полностью совпадает с наборами бозонов, переносящих разные физические силы в модели SU(5). Но у нас они возникли непосредственно из структуры группы S_4, то есть из группы вращения куба.

Фермионы и икосаэдр

Похоже, что приведенные в таблице базовые фермионы имеют отношение к икосаэдру — додекаэдру. Как обнаружили Джорджи и Глэшоу, в множестве этих частиц проявляют себя симметрии пятого порядка, а это характерный признак именно таких фигур (см. книгу Глэшоу, с. 263).



4

Поставленный на вершину куб соответствует поколению фермионов

Мы говорили, что окончательное число фермионов пока не известно. В таблице их 24, но, чтобы получить общее их количество, надо еще учесть античастицы и разные поляризации (два возможных значения спина). Для одного поколения получается $8 \times 2 \times 2 = 32$, но нейтрино бывают только левой поляризации, а антинейтрино — правой. Значит, всего 30, а для трех поколений 90.

Однако если поколений на самом деле четыре (что вполне вероятно), то в итоге их будет 120, и это число лучше укладывается в «Платоново ложе». Таков, как мы помним, порядок группы S_5 (5-факториал), но сейчас мы занимается фермионами, и потому нас больше привлекают не симметрические, а знакопеременные группы.

Группа вращения икосаэдра A_5 имеет порядок 60, но его можно удвоить, если к допустимым операциям добавить отражение от одной из плоскостей симметрии этого многогранника — тогда мы перейдем к расширенной группе $\tilde{A}_5$. (Хотя она содержит столько же элементов, как и S_5, но это две совсем разные группы.)

У тетраэдра тоже есть расширенная группа $\tilde{A}_4$. И вот какой интересный эффект: у группы A_5 (вращения икосаэдра) есть подгруппа A_4 (вращения тетраэдра), но у расширенной группы $\tilde{A}_5$ расширенная группа $\tilde{A}_4$ уже не служит подгруппой. Вместо нее у $\tilde{A}_5$ есть другая подгруппа (обозначим ее $^*A_4$), состоящая из группы тетраэдра, дополненной операцией отражения относительно его центра. Этой подгруппе соответствует не что иное, как stella octangula — ведь два тетраэдра в восьмиконечной звезде связаны как раз такой симметрией.

Попробуем придать вновь введенным операциям физический смысл. Отражению от плоскости мог бы отвечать переход от частицы к античастице, а отражению от центра — к другой поляризации. Допустим еще, что при энергиях Великого объединения действует расширенная группа $\tilde{A}_5$, а при более низких — ее подгруппа $^*A_4$ (как учит теория фазовых переходов, при охлаждении системы она становится менее симметричной).

Тогда с падением температуры равноправие частиц и античастиц должно было нарушиться. Значит, в свойствах конечных групп может лежать разгадка наблюдаемой асимметрии природы — наличия мира, но не антимира.

Было замечено (об этом писал Джорджи), что каждое поколение фермионов хорошо моделируется кубом. В самом деле, расположим куб на горизонтальной плоскости так, чтобы он стоял на вершине (рис. 4). Нарисуем на плоскости три оси A, B, C под углами 120° друг к другу — они будут изображать цветовые заряды; значение электрического заряда откладываем по вертикали.

Тогда нижней и верхней вершинам куба отвечают два лептона одного поколения, скажем, нейтрино и позитрон (их электрические заряды 0 и 1, а цветовые заряды отсутствуют). Остальные шесть вершин образуют в двух горизонтальных плоскостях правильные треугольники, отображающие все цветовые состояния u-кварка и d-антикварка. Их электрические заряды, как и должно быть, дробны: 2/3 и 1/3.

Но ведь такой куб можно заменить вписанной в него восьмиконечной звездой, концы которой суть те же восемь точек, что и вершины куба. Два образующих ее скрещенных тетраэдра отражают симметрию между двумя четверками частиц в каждом поколении фермионов. Судя по всему, ему соответствует stella octangula — подгруппа расширенной группы икосаэдра.

Вперед, к Платону

Конечно, все вышеизложенное — не столько решение, сколько постановка проблемы. Фермионы и бозоны не независимы, поэтому оба класса частиц должны быть увязаны между собой. Кроме того, нужно согласовать эти соображения с современной теорией поля. И все же трудно отделаться от впечатления, что правильные многогранники действительно способны пролить новый свет на структуру материи.

Среди Платоновых тел наиболее интересен икосаэдр, и с ним сталкиваются, порой совершенно неожиданно, в самых разных разделах математики. Этот факт должен послужить эвристикой при работе над единой теорией элементарных частиц — ведь в природе наверняка воплощена самая изощренная абстрактная структура. Ее нахождение — прометеева задача наших дней.

Как писал Вернер Гейзенберг, «развитие физики выглядит так, словно в конце концов будут найдены очень простые законы природы — такие, какими их надеялся увидеть еще Платон». Не исключено, что эти законы окажутся связанными с правильными многогранниками. Даже когда знания о физической реальности были еще очень скудны, находились мыслители (Платон, Кеплер), видевшие в этих фигурах ключ к ее пониманию. Наверное, они составляют тот арьергард, который всегда впереди.